

Aplikácia moderných metód stavového riadenia na reálny výukový systém

Štefan JAJČIŠIN, Anna JADLOVSKÁ

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI TU v Košiciach, Slovenská republika

stefan.jajcisin@tuke.sk, anna.jadlovska@tuke.sk

Abstrakt—Článok sa zaoberá modernými metódami návrhu stavového riadenia a verifikáciou algoritmov naprogramovaných na základe týchto metód na nelineárnom dynamickom systéme. Článok prezentuje výsledky získané pri riadení reálneho výukového modelu Helikoptéra pomocou rozoberaných algoritmov stavového riadenia.

Kľúčové slová—LQ riadenie, MPC prediktívne riadenie, stavové riadenie

I. ÚVOD

V článku sa zaoberáme matematickým odvodením stavového riadenia na základe optimalizačných metód, ktoré minimalizujú kvadratický funkcionál: lineárnym kvadratickým (LQ) riadením, LQ riadením so sumátorom a stavovým prediktívnym riadením (MPC), pričom návrh samotného riadenia vychádza z matic diskrétného stavového opisu lineárnej aproximácie nelineárneho dynamického systému.

Ďalej sa venujeme verifikácii navrhnutých algoritmov stavového riadenia pri riadení reálneho výukového modelu *Helikoptéra* [1], ktorý sa nachádza v Laboratóriu znalostných technológií na Katedre kybernetiky a umelej inteligencie.

II. STAVOVÉ RIADENIE

Vo všeobecnosti môžeme na opis dynamiky fyzikálnych systémov použiť matematické vyjadrenie v tvare nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned} \quad (1)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavov, $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupov, $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupov, t je čas, \mathbf{f} a \mathbf{g} sú nelineárne vektorové funkcie.

Stavový opis, ktorý vzniká diskretizáciou lineárnej aproximácie nelineárnych diferenciálnych rovníc (1) s periódou vzorkovania T_s má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

kde \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C} , \mathbf{D} je matica dynamiky, vstupov, výstupov, priamej väzby, $\mathbf{x}(k)$ je vektor stavových veličín, $\mathbf{u}(k)$ je vektor vstupov a $\mathbf{y}(k)$ je vektor výstupov dynamického systému.

Samotný návrh stavového riadenia vychádza z (2) a na výpočet zákona riadenia využíva hodnoty stavových veličín. Typická riadiaca štruktúra stavového riadenia je na Obr. 1(a).

V rámci teórie stavového riadenia rozlišujeme tieto základné prístupy:

1. riadenie do rovnovážneho stavu

- dynamický systém, vybudený zo svojho rovnovážneho stavu (napríklad vplyvom poruchy) je pôsobením riadenia vrátený do rovnovážneho stavu,
- akčný zásah je podľa [2] vyjadrený vo forme

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k), \quad (3)$$

kde \mathbf{K} je matica zosilnení stavových veličín a na výpočet jej prvkov existuje viacero metód, napríklad aj metóda umiestnenia koreňov charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu.

2. riadenie na ustálený stav

- riadenie do požadovaného stavu, ktoré je zároveň schopné eliminovať vplyv poruchových veličín trvajúcí určitý čas,
- akčný zásah je podľa [2] daný vzťahom

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{w}(k), \quad (4)$$

kde \mathbf{N} je matica zosilnení riadiacich veličín,

- riadiaca štruktúra je na Obr. 1(b),
3. sledovanie referenčnej trajektórie

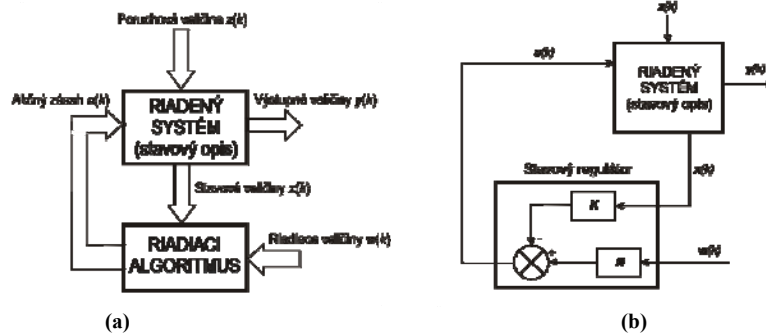
- riadenie zamerané na sledovanie referenčnej trajektórie výstupom dynamického systému a odstránenie vplyvu akýchkoľvek poruchových veličín (aj trvalých),
- do tejto oblasti patrí aj stavové prediktívne riadenie;
- podľa [3] je pri tomto spôsobe riadenia možné rozšíriť stavové riadenie tým spôsobom, že do riadiacej štruktúry bude zakomponovaný sumátor, ktorý je diskretným ekvivalentom integrátora a spracováva regulačnú odchýlku,
- akčný zásah je podľa [3] definovaný

$$\mathbf{u}(k+1) = -\mathbf{K}_1\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{S}_u(k+1) + \mathbf{K}_2\mathbf{w}(k+1), \quad (5)$$

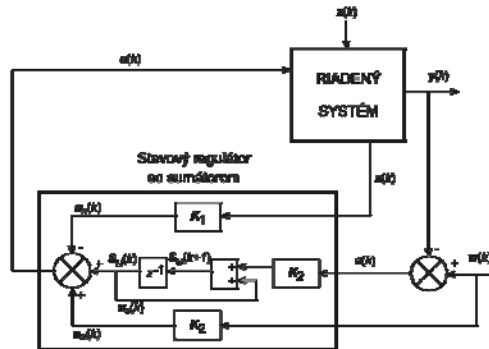
kde matice \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 a sumátor \mathbf{S}_u budú vysvetlené v časti III,

- riadiaca štruktúra tohto prístupu stavového riadenia je znázornená na
- Obr. 2.

V nasledujúcich častiach článku sa budeme venovať druhému a tretiemu prístupu.



Obr. 1 Riadiaca štruktúra stavového riadenia



Obr. 2 Riadiaca štruktúra stavového riadenia so sumátorom

III. NÁVRH KOEFICIENTOV MATÍC STAVOVÉHO RIADENIA

Cieľom návrhu je určenie koeficientov matíc, ktoré sa vyskytujú v (4) a (5) tak, aby výstup zo spätnoväzobnej štruktúry nadobúdal požadované hodnoty, resp. sledoval referenčnú trajektóriu. Metód návrhu koeficientov týchto matíc stavového riadenia existuje niekoľko. V rámci tohto článku budeme prezentovať tieto tri metódy:

1. minimalizácia kvadratického funkcionálu – LQ riadenie,
2. rozšírenie LQ riadenia o sumátor,
3. stavové prediktívne riadenie – MPC.

1. Minimalizácia kvadratického funkcionálu – LQ riadenie

Vychádzajúc z [2] je v tomto prípade cieľom návrhu určenie koeficientov matice \mathbf{K} tak, aby bol minimalizovaný funkcionál

$$J_{LQ} = \mathbf{x}^T(M)\mathbf{Q}^*\mathbf{x}(M) + \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{S}\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{S}^T\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k), \quad (6)$$

kde $\mathbf{Q}^* \geq 0$, $\mathbf{Q} \geq 0$ sú kladne semidefinitné, $\mathbf{R} > 0$ je kladne definitná a \mathbf{S} váhová matica, väčšinou nulová.

Funkcionál (6) je možné zapísať v maticovom tvare

$$J_{LQ} = \mathbf{x}^T(M) \mathbf{Q}^* \mathbf{x}(M) + \sum_{k=0}^{M-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

S využitím postupu uvedenom v [2] a na základe minimalizujúcich podmienok

$$\frac{\partial J_{LQ}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))}{\partial \mathbf{u}^T(k)} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \frac{\partial J_{LQ}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))}{\partial \mathbf{x}^T(k)} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (8)$$

získame diskrétnu maticovú algebraickú Riccatiho rovnicu, ktorá má pre ustálené riešenie tvar

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d - \underbrace{\left[\mathbf{S} + \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right] \left[\mathbf{R} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right]^{-1} \left[\mathbf{S} + \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{B}_d \right]^T}_{\mathbf{K}}, \quad (9)$$

kde \mathbf{P} je symetrická, kladne definitná matica.

Vzťah pre výpočet koeficientov matice \mathbf{N} , za predpokladu, že počet vstupov je rovnaký ako počet výstupov dynamického systému je podľa [2]

$$N_i = \frac{1}{\mathbf{c}_i^T \left[\mathbf{I} - (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}) \right]^{-1} \mathbf{b}_i}, \quad (10)$$

kde i je číslo daného vstupu, resp. výstupu. Vypočítané prvky N_i tvoria diagonálu matice \mathbf{N} , ostatné prvky matice \mathbf{N} sú nulové.

2. LQ riadenie so sumátorom

V prípade použitia stavového riadenia so sumátorom podľa riadiacej štruktúry, ktorá je na

Obr. 2 je vychádzajúc z [3] akčný zásah daný vzťahom (5), kde hodnotu sumátora \mathbf{S}_u v každom kroku udáva rovnica

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u(k+1) &= \mathbf{S}_u(k) + \mathbf{K}_2 e(k) = \\ &= \mathbf{S}_u(k) + \mathbf{K}_2 [\mathbf{w}(k) - \mathbf{y}(k)] \quad , \\ &= \mathbf{S}_u(k) + \mathbf{K}_2 \mathbf{w}(k) - \mathbf{K}_2 \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (11)$$

kde $\mathbf{w}(k)$ je vektor referenčnej trajektórie.

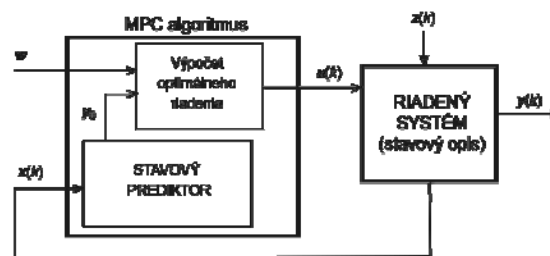
Na základe [3] sa matice \mathbf{K}_1 a \mathbf{K}_2 v (5) určia z rovnosti matíc

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \mathbf{A}_d & -\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{I} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \quad (12)$$

za predpokladu, že existuje inverzná matica $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{I} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1}$, pričom v (12) vystupujú matice stavového opisu (2), \mathbf{I} je jednotková matica a \mathbf{K} je matica zosilnení stavových veličín, ktorá je vypočítaná niektorou z metód pre jej návrh, v našom prípade minimalizáciou funkcionálu (6).

3. Stavové prediktívne riadenie – MPC

Riadiaca štruktúra stavového prediktívneho riadenia je znázornená na Obr. 3, pričom korešponduje so štruktúrou na Obr. 1.



Obr. 3 Riadiaca štruktúra stavového prediktívneho riadenia

Návrh MPC riadenia spočíva v minimalizácii funkcionálu

$$J_{MPC} = \sum_{i=N_1}^{N_p} \mathbf{Q}(i) [\hat{\mathbf{y}}(k+i) - \mathbf{w}(k+i)]^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{R}(i) [\mathbf{u}(k+i-1)]^2, \quad (13)$$

kde N_p , resp. N_u je predikčný, resp. riadiaci horizont a $Q(i)$, $R(i)$ sú vektory váh, $N_1 = 1$.

Podľa [4] je možné predikciu výstupu dynamického systému zapísať v maticovom tvare $\hat{y} = Vx(k) + Gu$, (14)

kde

$$\hat{y} = [\hat{y}(k+1) \quad \hat{y}(k+2) \quad \dots \quad \hat{y}(k+N_p)]^T, \quad u = [u(k) \quad u(k+1) \quad \dots \quad u(k+N_p-1)]^T$$

$$V = \begin{pmatrix} CA_d \\ \vdots \\ CA_d^{N_p} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} CB_d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA_d^{N_p-1} B_d & \dots & CB_d & \dots \end{pmatrix}$$

Dosadením (14) do maticového tvaru funkcionálu, (13) získame rovnicu

$$J_{MPC} = (Vx(k) + Gu - w)^T Q (Vx(k) + Gu - w) + u^T Ru, \quad (15)$$

z ktorej po minimalizovaní podľa u na základe vzťahov pre deriváciu vektorov uvedených v [4] môžeme vyjadriť vzťah pre výpočet akčného zásahu

$$u = -(G^T QG + R)^{-1} [G^T Q(Vx(k) - w)]. \quad (16)$$

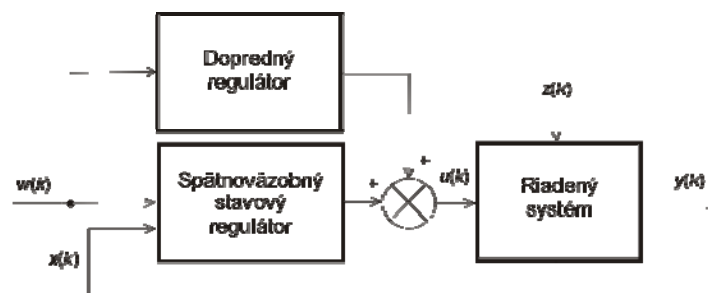
Niekedy sa zvykne vo funkcionáli (13) vážiť zmena akčného zásahu Δu namiesto u , čo má za úlohu zabezpečiť integračný charakter riadenia.

Dôležitou výhodou metód prediktívneho riadenia je možnosť rešpektovania požadovaných obmedzení (akčného zásahu, jeho zmeny, výstupu systému) pri výpočte akčného zásahu. Toto je možné prostredníctvom kvadratického programovania. V našom prípade sme na tento účel využili funkciu *quadprog* implementovanú v rámci Optimalizačného toolboxu Matlabu.

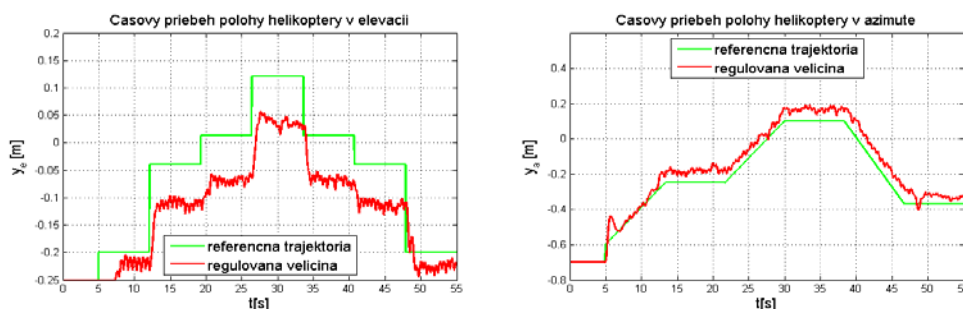
IV. VERIFIKÁCIA ALGORITMOV STAVOVÉHO RIADENIA NA REÁLNO M VÝUKOVOM MODELI

Pre verifikáciu stavového riadenia na reálnom výukovom modeli sme využili fyzikálny systém *Helikoptéra*. Jedná sa o MIMO systém s dvoma stupňami voľnosti, ktorého riadiace vstupy sú napätia motorčekov pre hlavnú a vedľajšiu vrtuľu a výstupy predstavuje poloha modelu v smere elevácie a azimutu. Lineárny stavový opis, potrebný pre návrh riadenia je uvedený v [5]. Riadiacu štruktúru sme realizovali v prostredí Matlab, do ktorého boli načítavané údaje o stave reálneho systému z laboratórnej karty, vypočítaný akčný zásah a ten spätne poslaný na laboratórnu kartu, ktorá je prepojená s reálnym modelom. Načítavanie a zapisovanie údajov na laboratórnu kartu sme realizovali pomocou funkcií RealTime Toolboxu [6]. Cieľom riadenia bolo zabezpečiť požadovanú polohu helikoptéry v elevácii a azimute.

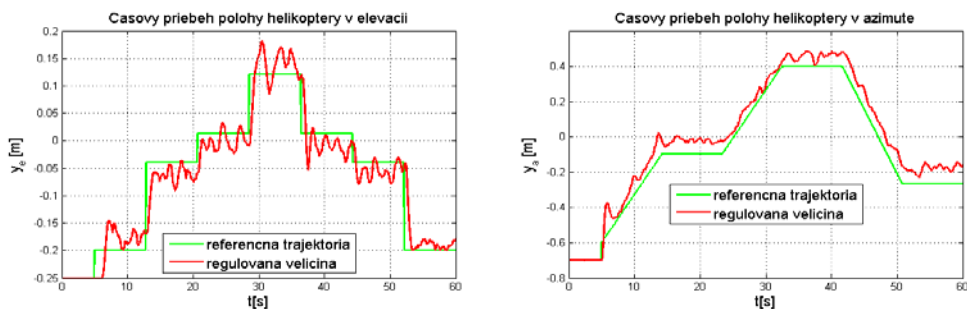
Je potrebné poznamenať, že v prípade MPC riadenia bola do riadiacej štruktúry zakomponovaná aj dopredná väzba podľa nasledujúceho obrázka, kde dopredný regulátor určuje ustálenú hodnotu napätia motora pre eleváciu podľa aktuálnej žiadanej hodnoty.



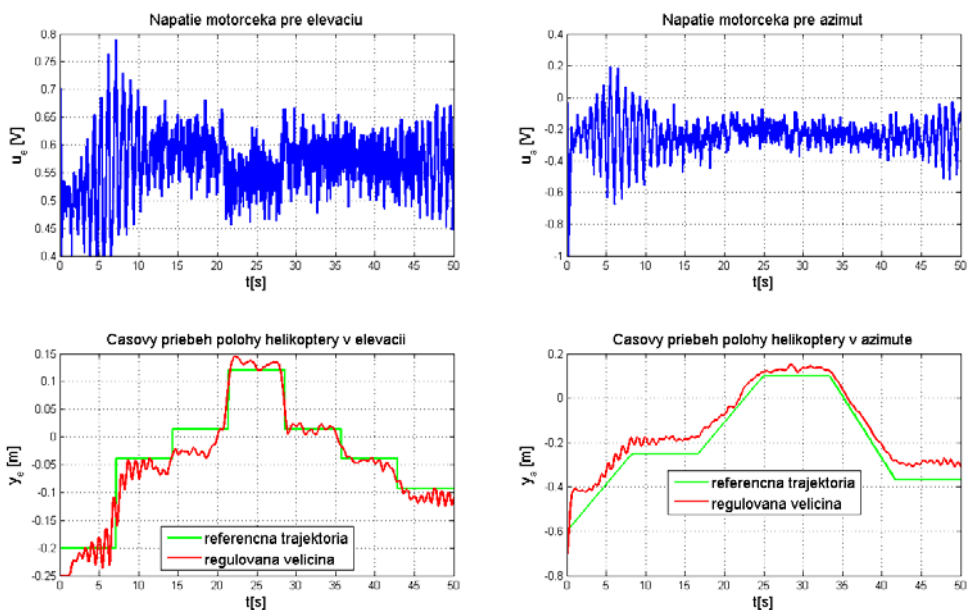
Obr. 4 Spätnoväzobná riadiaca štruktúra s doprednou väzbou



Obr. 5 Výsledky riadenia reálneho výukového modelu Helikoptéra (MIMO) – LQ riadenie



Obr. 6 Výsledky riadenia reálneho výukového modelu Helikoptéra (MIMO) – LQ + sumátor



Obr. 7 Výsledky riadenia reálneho výukového modelu Helikoptéra (MIMO) – MPC riadenie

V. ZHODNOTENIE

V článku sme uviedli výsledky riadenia reálneho výukového modelu Helikoptéra pomocou algoritmov naprogramovaných na základe rôznych metód stavového riadenia. Z uvedených výsledkov je zrejmé, že stavové riadenie bez integračného (sumačného) člena nedokáže odstrániť trvalú regulačnú odchýlku pri riadení nelineárnych dynamických systémov. Vhodným riešením odstránenia tohto nedostatku je zakomponovanie sumátora do riadiaceho obvodu v súlade s Obr. 2, prípadne rozšírenie riadiacej štruktúry o doprednú väzbu (Obr. 4). Výhodou MPC algoritmu v riadení dynamických systémov, v porovnaní so zvyšnými dvoma algoritmi uvedenými v článku, je fakt, že pri výpočte akčného zásahu sa v každom kroku berie do úvahy skutočný priebeh referenčnej trajektórie na dĺžke predikčného horizontu a nie len jej aktuálna hodnota v danom kroku.

POĎAKOVANIE

Tento článok bol vytvorený realizáciou projektu Centrum informačných a komunikačných technológií pre znalostné systémy (kód ITMS projektu: 26220120020) na základe podpory operačného programu Výskum a vývoj financovaného z Európskeho fondu regionálneho rozvoja.

LITERATÚRA

- [1] Humusoft, *CE 150 Helicopter model* (Educational Manual), 1996 – 2004.
- [2] D. Krokavec – A. Filasová, *Diskrétné systémy*. Košice: TU-FEI, 2006. ISBN 80-8086-028-9.
- [3] O. Modrlák, *Základy analýzy a syntézy ve stavovém prostoru*. Teorie automatického řízení II. (Studijní materiály). Liberec: TU, 2004.
- [4] J. Roubal, *Prediktivní regulátor* (Příklady ze cvičení – Moderní teorie řízení). Dostupné na internete: <http://support.dce.felk.cvut.cz/pub/roubalj/teaching/MTR/seminars/MTR_cv8_mpc.pdf>.
- [5] R. Lonščák, *Algoritmy riadenia virtuálnych modelov dynamických systémov s využitím Matlab Web Servera*. Košice: TU – FEI, 2006.
- [6] Humusoft, *Real-Time Toolbox* (User's manual), 1996 – 2002.